8. srpnja 2022.

Drugi kolokvij iz kolegija **Modalna logika**

1. a) (2 boda) Odredite standardnu translaciju formule $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

   b) (5 bodova) Dokažite da za svaki Kripkeov model $\mathfrak{M}$ i svaku formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:
$$\mathfrak{M} \Vdash \varphi \text{ ako i samo } \mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\varphi)$$

   c) (3 boda) Dokažite teorem kompaktnosti za modalnu logiku.

2. a) (2 boda) Odredite sve ultrafiltre nad skupom $I = \{1, 2, 3\}$.

   b) (3 bodova) Dokažite da je svaki konačni netrivijalni filter nužno glavni filter.

   c) (5 bodova) Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeov model, $w \in W$ neki svijet, I neprazan skup i U neki ultrafiltar nad skupom I. Označimo sa f_w konstantnu funkciju s domenom I i kodomenom W koja je definirana sa $f(i) = w$. Dokažite da za svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:
$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \prod_U \mathfrak{M}, (f_w)_U \Vdash \varphi$$

3. a) (6 bodova) Dokažite da je svaka klasa modalno saturiranih modela Hennessy–Milnerova klasa.

   b) (4 boda) Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{N} = (W', R', V')$ Kripkeovi modeli, $w \in W$ i $v \in W'$ neki svjetovi, I neprazan skup i U neki ultrafiltar nad skupom I. Označimo sa f_w konstantnu funkciju s domenom I i kodomenom W koja je definirana sa $f(i) = w$. Analogno koristmo oznaku f_v. Neka postoji bisimulacija
$$Z : \prod_U \mathfrak{M}, (f_w)_U \underline{\leftrightarrow} \prod_U \mathfrak{N}, (f_v)_U.$$
   Dokažite da tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, v$.